

# 承载能力可调力电耦合曲梁准零刚度 隔振器设计与分析

易凯军, 蒋守谦, 朱睿

(北京理工大学 宇航学院, 北京 100081)

**摘要:** 针对现有准零刚度隔振器很难适应负载变化的问题, 提出了一种负载能力可调的力电耦合曲梁准零刚度隔振器。该隔振器主要由负电容分流压电纤维片以及余弦曲梁组成, 通过改变负电容值调节曲梁非线性刚度即可实现对隔振器承载能力的调控。采用模态叠加法和最小总势能原理, 推导了压电曲梁的力-位移关系, 并进行了有限元验证。进一步, 将压电曲梁连接 U 型外壁构成隔振器, 建立了其简化解析模型和实体有限元模型, 并分析其在不同负载下的隔振特性。结果表明, 通过负电容电路实现对压电材料模量的调控, 该隔振器能够在不同负载下产生所需的准零刚度特性, 实现低频隔振。

**关键词:** 准零刚度; 压电材料; 负电容电路; 低频; 隔振

中图分类号: TH212; TH213.3 文献标志码: A 文章编号: 1001-0645(2024)11-1128-10

DOI: [10.15918/j.tbit1001-0645.2024.013](https://doi.org/10.15918/j.tbit1001-0645.2024.013)

## Design and Analysis of Piezoelectric Quasi-Zero-Stiffness Vibration Isolators for Different Loads

YI Kaijun, JIANG Shouqian, ZHU Rui

(School of Aerospace Engineering, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China)

**Abstract:** To address the challenge of limited adaptability to varying loads in existing quasi-zero-stiffness isolators, this study designed a load-adjustable piezoelectric quasi-zero-stiffness isolator. This isolator primarily comprised a piezoelectric patch with an externally connected negative capacitance shunt circuit and a cosine-shaped curved beam. The nonlinear stiffness of the curved beam could be adjusted, by modifying the negative capacitance value, allowing for control over the isolator's load-bearing capacity. Initially, by adopting modal superposition and minimum total potential energy principle, the force-displacement relationship of the piezoelectric curved beam was derived. The derived relationship accuracy was validated through comparison with finite element results. Subsequently, the piezoelectric curved beam was coupled with a U-shaped stiffer wall to form the isolator. Both the simplified analytical model and the comprehensive finite element model of the isolator were established to investigate its isolation characteristics under various loads. The results indicate that the regulation of the modulus of piezoelectric materials through negative capacitance circuits can generate the quasi-zero-stiffness characteristics under different loads, achieving excellent low-frequency vibration isolation performance.

**Key words:** quasi-zero stiffness; piezoelectric material; negative capacitance circuit; low frequency; isolation vibration

在日常生活和工程应用中,振动是普遍存在的现象,而且通常被视为有害因素。在航空航天、机械加工、超精密制造等许多领域中,比如:轮足式机器人<sup>[1]</sup>,振动会对加工精度产生影响,干扰设备的正常运行,甚至在严重情况下会引起结构损坏。因此,采用振动控制方法来抑制振动变得十分必要。振动控制方法通常可以分为主动、半主动和被动三类。其中,主动和半主动振动控制方法需要传感器和控制系统,这使系统变得更为复杂,并需要能量供应。相比之下,被动控制方法通过结构的刚度和阻尼特性来实现振动隔离<sup>[2]</sup>,具有系统简单和可靠性高的优点。然而,传统的线性隔振系统只能有效隔离 $\sqrt{2}$ 倍共振频率以上的振动。为了扩宽振动有效隔离区间、实现更好的振动隔离效果,可以尝试降低线性系统的刚度,从理论上来讲,这样能够降低共振频率。但是,降低刚度也会带来承载能力降低的问题。因此,为了解决上述矛盾,研究人员尝试在振动隔离系统中引入非线性因素以改善性能,从而实现具有更高承载能力和较低动态刚度的特性,以获得更好的振动隔离性能。这种高静态低动态刚度性能简称为“高静低动”特性<sup>[3]</sup>。

为了实现这种特性,研究人员提出将负刚度机构引入到隔振系统,并且和正刚度机构并联以实现准零刚度,这种准零刚度隔振器具有典型的“高静低动”特性。这种设计使得在静态平衡位置附近,动态刚度非常小,从而实现更好的振动隔离效果。准零刚度隔振器有多种组成形式,其中最经典的就是CARRERA 等<sup>[4]</sup>和 KOVACIC 等<sup>[5]</sup>提出的三弹簧准零刚度模型,由两个提供负刚度的斜弹簧与提供正刚度的竖直弹簧并联组成。HAO 等<sup>[6-8]</sup>、ZHANG 等<sup>[9]</sup>、XU 等<sup>[10]</sup>、DING 等<sup>[11]</sup>利用这种竖直弹簧与斜弹簧组合的形式提出了单自由度准零刚度隔振原理模型,并且对准零刚度隔振的原理进行了较为深入的研究。LAN 等<sup>[12]</sup>也对三弹簧准零刚度隔振器进行了深入研究,与之前研究不同之处在于他们设计了横向调节机构并采用特殊的平面弹簧代替普通的螺旋弹簧,以实现紧凑型结构设计,并对不同负载下的隔振性能进行了研究。ZHOU 等<sup>[13]</sup>将凸轮、转子和弹簧等效为三弹簧模型,通过凸轮和转子来提供负刚度,设计出了准零刚度隔振机构。YE 等<sup>[14]</sup>提出了一种新的优化凸轮滚子机构,通过增加凸轮的数量,使准零刚度隔振器能够适应不同的载荷。ZUO 等<sup>[15]</sup>提出了一种抛物线凸轮滚子隔振器,进一步扩展了对凸轮负刚

度结构的研究。这些由机构组合得到的准零刚度隔振器一个共性的不足是很难小型化和精密化。为了解决上述问题, QIU 等<sup>[16]</sup>提出利用余弦曲梁的双稳态特性实现负刚度或准零刚度,从而实现对小型元件的振动控制。并且 QIU 在理论和实验上也证明了余弦曲梁在受到横向载荷时,可以通过几何参数设计实现负刚度,甚至直接准零刚度的特性。这项研究为后续的相关研究提供了启发,并随着增材制造技术的不断发展,越来越多的研究人员开始关注这种余弦曲梁结构。基于余弦曲梁的特性, ZHAO 等<sup>[17]</sup>设计出了一种直接准零刚度隔振超结构,并通过增材制造实现一体成型,取得了良好的低频振动抑制效果。FAN 等<sup>[18]</sup>设计了一个准零刚度单元,其中正刚度由一对半圆形的梁提供,而负刚度由余弦形状的曲梁获得,并对超结构的性能进行了数值研究。研究结果表明,这种隔振设计方案具有较好的隔振效果,适用于小型设备的隔振。DALELA 等<sup>[19]</sup>通过将 2 个余弦曲梁串联以提供负刚度,再加上一对半圆形梁提供正刚度,构造了准零结构单元,然后,并联 4 个单元形成了隔振平台,对其非线性动力学特性进行了研究。然而,这些结构都只能在设计的特定负载范围内工作,一旦外接载荷发生变化,其隔振特性会严重受到影响,需要重新设计组装。因此,需要开发一种负载能力可调的准零刚度曲梁隔振器。在此背景下,压电材料的特性为解决这个问题提供了新的思路。通过改变外接负电容分流电路,压电材料可以实现对等效模量的大范围调控<sup>[20]</sup>,从而为实现负载可调的准零刚度曲梁隔振器提供了潜在解决方案。

本文提出了一种简单、紧凑的力电耦合曲梁准零刚度隔振器设计方法。然后,基于模态叠加法和最小总势能原理,分析了压电曲梁的静力学特性,并利用有限元仿真进行了验证。最后,建立了隔振器的单自由度简化模型和有限元完整模型,研究了其隔振特性。

## 1 力电耦合准零刚度隔振器设计

### 1.1 隔振器设计

本研究中的力电耦合准零刚度隔振器模型如图 1(a)所示,由一个余弦形梁、两对压电纤维片和 U 型外壁构成。压电曲梁的尺寸如图 1(b)所示,余弦曲梁的预制形状为

$$\bar{w} = h/2[1 - \cos(2\pi(x - l/4))/l],$$

式中:  $l$  为长度;  $b$  为深度;  $t$  为厚度;  $h$  为跨高. 压电纤维片长度为  $l_p$ 、厚度为  $t_p$  以及有相同的深度为  $b$ . 粘贴压电纤维片的余弦形梁通过 U型外壁连接形成单元. 每个压电纤维片可以独立工作, 其表面粘结在基础梁上并接地, 同时在电极之间连接了一个负电容电路, 如图 1(c) 所示. 隔振器中曲梁的压缩量等于曲梁跨高时为设计的工作区域, 具有最小刚度, 并且刚度为初始刚度 5% 以下定义为准零刚度. 通过对曲梁和压电纤维片的材料和几何参数设计, 可以使其在工作区域实现准零刚度特性.

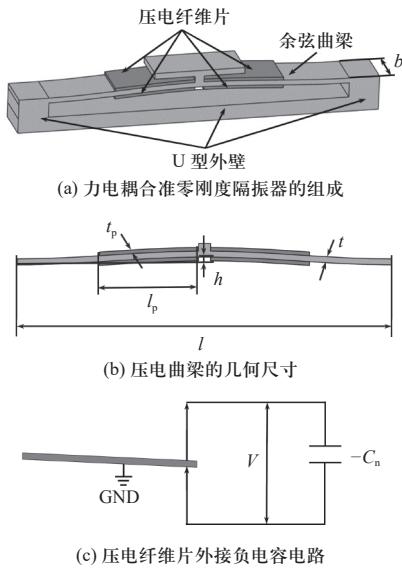


图 1 力电耦合准零刚度隔振器模型

Fig. 1 Model of piezoelectric quasi-zero stiffness vibration isolator

## 1.2 压电纤维片位置优化设计

准零刚度曲梁隔振器在工作时, 曲梁被压缩至水平, 所以可以假设梁为直梁来进行压电纤维片位置的优化. 压电材料的控制效果主要由机电耦合系数决定, 对于两端固支的直梁, 其模态机电耦合函数<sup>[21]</sup> 为

$$D_r(X_i, X_{i+1}) = \phi'_r(X) \Big|_{X_i}^{X_{i+1}} \quad (1)$$

式中: 直梁振型函数  $\phi_r(X) = \cos \sqrt{\lambda_r} X - \cosh \sqrt{\lambda_r} X + \eta_r (\sin \sqrt{\lambda_r} X - \sinh \sqrt{\lambda_r} X)$ ;  $\phi'_r(X)$  为其转角;  $X$  为量纲一的压电纤维片电极所在的位置坐标;  $\lambda_r$  为量纲一特征频率.

通过式(1)可以发现, 模态机电耦合函数与铺设压电纤维片两端的转角差成正比, 将压电纤维片粘贴在转角的最大值和最小值对应的位置之间, 能够实现最优的控制效果, 如图 2 所示. 因此, 通过将压电纤维片粘贴在  $0.23l$  和  $0.77l$  之间可以实现最佳控

制效果. 本研究中的模型在该区域内粘贴压电纤维片, 但通过一个长度为  $0.02l$  的凸起将它们分隔开.

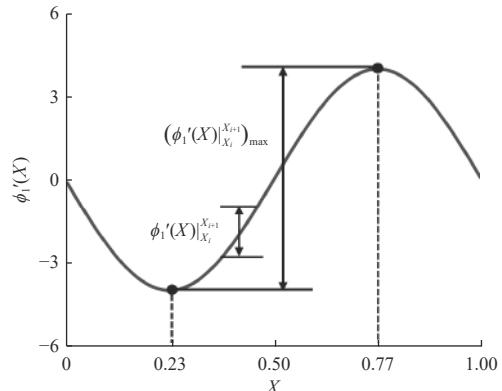


图 2 第一阶模态振型下转角与电极位置的关系

Fig. 2 Relationship between angle and electrode position under the first mode shape

## 2 压电曲梁的静态特性分析

### 2.1 压电曲梁非线性力位移关系

对于隔振系统的静态特性分析, 获得其非线性力-位移关系至关重要. 对于预形状梁, 采用屈曲模态作为基准可以很好地近似曲梁的力学行为<sup>[16, 22]</sup>, 所以可以使用模态叠加法描述曲梁的变形. 当曲梁受到横向载荷时, 主要产生变化的能量有: 弯曲能、压缩能和压力做功产生的势能. 因此, 采用最小势能原理研究其力-位移关系最为简便.

受压直梁的屈曲模态可以表示为

$$w(x) = \sum_{i=1,2,3,\dots} A_i W_i(x) \quad (2)$$

式中:  $A_i$  为第  $i$  阶模态的未知系数;

$$\begin{cases} W_i(x) = 1 - \cos\left(N_i \frac{x}{l}\right), & i = 1, 3, 5, \dots, \\ N_i = (i+1)\pi \\ \begin{cases} W_i(x) = 1 - 2\frac{x}{l} - \cos\left(N_i \frac{x}{l}\right) + \frac{2}{N_i} \sin\left(N_i \frac{x}{l}\right), & i = 2, 4, 6, \dots, \\ N_i = 2.86\pi, 4392\pi, 6.94\pi \dots \end{cases} \end{cases}$$

ZHOU 等<sup>[13]</sup> 的研究表明, 只截取一阶模态就能够很好地描述其力学行为(考虑高阶模态的计算见附录 A). 曲梁上任一点的变形可以表示为

$$\hat{w}(x) = \bar{w}(x) - w_1(x) \quad (3)$$

那么, 梁中点的位移可以表示为

$$d\left(\frac{l}{2}\right) = \bar{w}\left(\frac{l}{2}\right) - w_1\left(\frac{l}{2}\right) = h - 2A_1 \quad (4)$$

对于外接负电容电路的压电材料, 其等效杨氏

模量可以表示为

$$E_p^{su}(\omega) = E_p^{oc} \left( 1 - \frac{k_{31}^2}{1 + i\omega C_p^s Z_{su}(\omega)} \right), \quad Z_{su}(\omega) = -\frac{1}{i\omega C_n} \quad (5)$$

式中:  $E_p^{oc}$  为压电纤维片开始状态下的杨氏模量;  $k_{31}$  为机电耦合系数;  $\omega$  为外界激励频率;  $C_p^s$  为压电纤维片的本征电容;  $Z_{su}(\omega)$  为电容电路的阻抗;  $C_n$  为外接负电容电路的电容值.

压电曲梁的弯曲能可以表示为

$$u_b = 2 \left\{ \frac{D_b}{2} \int_0^{0.23l} \left( \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \right)^2 dx + \frac{D_{eff}}{2} \int_{0.23l}^{0.49l} \left( \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \right)^2 dx \right\} \quad (6)$$

$$\text{式中: } D_b = E_b \frac{bt^3}{12}, \quad D_{eff} = \frac{bE_p^{su} \left[ (t+2t_p)^3 - t^3 \right] + E_b bt^3}{12}.$$

假设压电纤维片的变形量与被其覆盖的梁的变形量相同, 压电曲梁的压缩能可以表示为

$$u_s = 4 \frac{p_p \Delta s_p}{2} + \frac{p_b \Delta s_b}{2} = \frac{4E_p^{su} t_p b (\Delta s_p)^2}{2(0.26l)} + \frac{E_b t b (\Delta s_b)^2}{2l} \quad (7)$$

式中:  $\Delta s_p$  和  $\Delta s_b$  分别为压电纤维片和基础梁的压缩变形量.

$$\Delta s_p = s_p - s_0 = \frac{1}{2} \int_{0.23l}^{0.49l} \left[ (w'_1)^2 - (\bar{w}')^2 \right] dx \quad (8)$$

$$\Delta s_b = s_b - s_1 = \frac{1}{2} \int_0^l \left[ (w'_1)^2 - (\bar{w}')^2 \right] dx \quad (9)$$

式中:  $s_p$  和  $s_b$  分别为压电纤维片和基础梁变形后的长度;  $s_0$  和  $s_1$  分别为压电纤维片和基础梁的初始长度.

力做功产生的势能为

$$u_f = -fd \left( \frac{l}{2} \right) \quad (10)$$

系统的总能量可以表示为

$$u_{tot} = u_b + u_s + u_f \quad (11)$$

根据最小势能原理:

$$\frac{du_{tot}}{dA_1} = 0 \quad (12)$$

则可以求出压电曲梁的非线性力位移关系:

$$f = \frac{b}{32l^3} \left( 15.38 E_p^{su} h_p D_{11}^2 + E_b t D_{21}^2 \right) \left( d^3 - 3hd^2 + 2h^2 d \right) + \frac{D_b C_{11} + D_{eff} C_{21} + D_b C_{31}}{2l^3} d \quad (13)$$

式中:

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{11} = \int_0^{0.23} (\bar{W}'' - W_1'')^2 dX = 1.998 3\pi^4 \\ C_{21} = \int_{0.23}^{0.49} (\bar{W}'' - W_1'')^2 dX = 1.841 9\pi^4 \\ C_{31} = \int_{0.49}^{0.5} (\bar{W}'' - W_1'')^2 dX = 0.159 8\pi^4 \\ D_{11} = \int_{0.23}^{0.49} (W_1')^2 dX = 0.579 5\pi^2 \\ D_{21} = \int_0^{0.5} (W_1')^2 dX = 2\pi^2 \\ \bar{W} = \frac{\bar{w}}{l}, W_1 = \frac{w_1}{l}, X = \frac{x}{l} \end{array} \right.$$

## 2.2 材料和几何参数对压电曲梁非线性刚度的影响规律

为了更简单地对刚度进行分析, 可以将一些参数进行量纲一化:

$$F = \frac{fl^3}{E_b I h}, \quad P = \frac{t_p}{t}, \quad Q = \frac{h}{t}, \quad S = \frac{E_p^{su}}{E_b}, \quad \Delta = \frac{d}{h} \quad (14)$$

量纲一化后的力位移关系可以整理为

$$F = \frac{3}{8} A Q^2 \Delta \left( \Delta - \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{4B}{3AQ^2}} \right) \times \left( \Delta - \frac{3}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{4B}{3AQ^2}} \right) \quad (15)$$

式中:

$$\left\{ \begin{array}{l} A = 15.38 S P D_{11}^2 + D_{21}^2 \\ B = C_{11} + C_{21} + C_{31} + S C_{21} (8P^3 + 12P^2 + 6P) \end{array} \right.$$

从式(15)中可看出, 压电曲梁的力位移特性主要取决于压电纤维片与基础梁结构的厚度比( $P$ )、模量比( $S$ )以及基础梁跨高与厚度的比值( $Q$ )3个参数, 并且这3个参数都能产生显著影响, 如图3所示. 图3(a)和3(c)中分别展示了压电纤维片与基础梁结构的厚度和模量比对于压电曲梁力位移特性的影响, 从中可以看出改变这2个参数产生的影响基本相同, 随着  $P$ 、 $S$  的增大都会使整体刚度增大; 图3(b)中展示了基础梁跨高与厚度的比值的影响, 无论  $Q$  如何变化, 力位移曲线都会通过定点  $(1, B/2)$  和  $(2, B)$ .

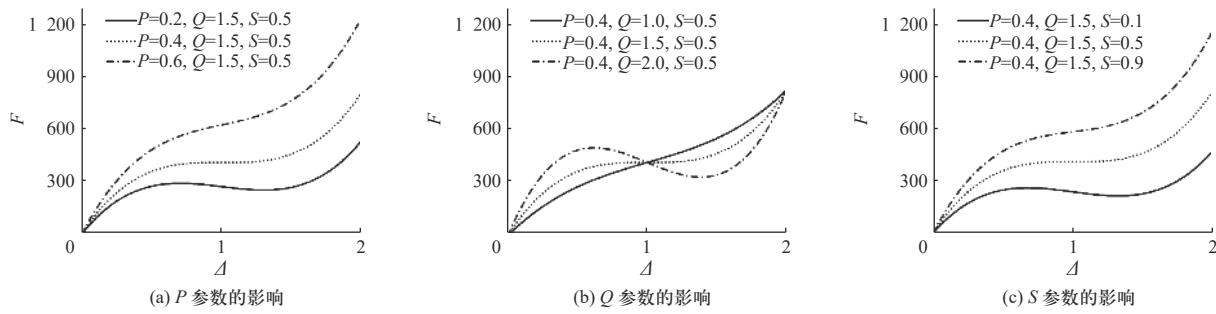


图3 不同参数对压电曲梁力位移曲线的影响

Fig. 3 Influence of different parameters on force displacement curve of piezoelectric curved beam

### 2.3 利用负电容调节压电曲梁准零刚度特性

通过图3(a)和3(c),能够发现改变压电纤维片的厚度和模量能够使压电曲梁刚度在正负之间变化.模型确立之后,其厚度在不拆卸重组的情况下很难发生改变,但通过改变外接负电容电路,可以轻松实现对模量的调节,从而实现对结构刚度的调控.

式(5)中描述了外接负电容电路对压电纤维片模量的影响,定义负电容比为 $\lambda = -C_n/C_p^s$ .图4所示结果为压电材料归一化后的等效模量 $E_{\text{eff}} = E_p^{\text{su}}/E_p^{\text{oc}}$ 与负电容比 $\lambda$ 之间的关系.当 $\lambda = 0$ 时,其等效模量趋于开路状态下的模量;当 $\lambda$ 从较大的负值趋于 $-(1-k_{31}^2)$ 时,其等效模量发生从正无穷到负无穷的跳变;当 $\lambda = -1$ 时,等效模量为0;当负电容比趋于负无穷时,其等效模量趋于短路状态下的模量.

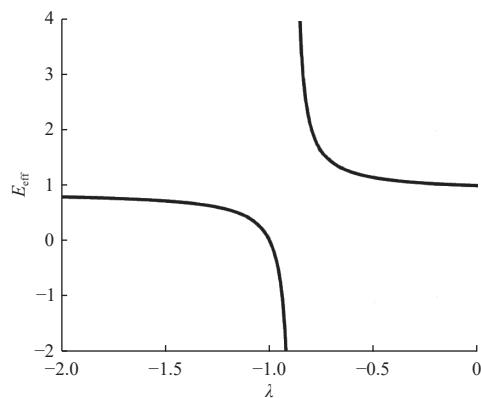


图4 压电材料等效模量与负电容比之间的关系

Fig. 4 Relationship between equivalent modulus of piezoelectric materials and negative capacitance ratio

先根据工况在不接通电路下设计出准零刚度隔振器,当负载发生变化时,将变化后的负载带入到力位移公式中,可以得到压电材料的模量,再根据式(5)就能够计算出所需的负电容值和负电容比的大小.

图5展示了通过调节外接电路使同一压电曲梁在不同负载下都能实现准零刚度特性的结果.根据额定负载22.26 kg设计出隔振器的参数,其中基础梁和压电纤维片的几何和材料参数如表1所示.定义 $K < 15 \text{ N/mm}$ 时为准零刚度区间,当 $\lambda = -0.7$ 时,其最小刚度刚好满足准零刚度条件.当负载变化为24.102 kg时,求得负电容比为 $\lambda = -0.7$ 能得到准零刚度特性;当负载变化为20.795 kg时,改变负电容比为 $\lambda = -1.5$ 即可得到准零刚度特性,其准零刚度位移区域为

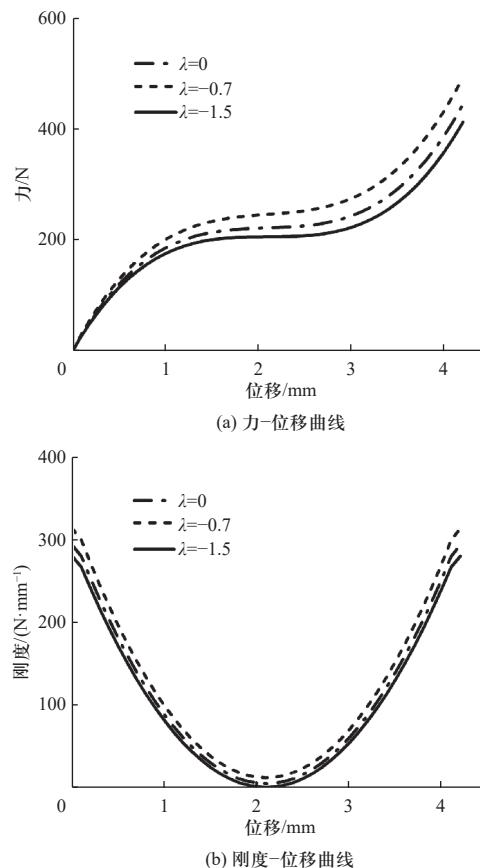


图5 不同负电容调控下的力位移曲线和刚度位移曲线

Fig. 5 Theoretical results of force-displacement and stiffness-displacement curves under different negative capacitance

1.6 ~ 2.6 mm。总体而言, 通过调节负电容值, 压电曲梁可以在不同负载下产生准零刚度特性, 而无需手动更换部件, 具有很大的应用前景。

表 1 压电曲梁的几何尺寸和材料参数

Tab. 1 Parameters of piezoelectric curved beam

基础梁	压电纤维片
$E_b = 70 \text{ GPa}$	$E_p^{sc} = 32.58 \text{ GPa}$
$t = 1.7 \text{ mm}$	$t_p = 0.3 \text{ mm}$
$h = 2.1 \text{ mm}$	$\varepsilon_{33} = 2344.4\varepsilon_0$
$l = 100 \text{ mm}$	$\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m}$
$b = 14 \text{ mm}$	$d_{31} = -267 \times 10^{-12} \text{ C/N}$

此外, 在商业有限元软件 COMSOL Multiphysics 5.4 中建立如图 6 所示的有限元分析模型。在构造隔振器时, 曲梁两侧的外壁至少为  $l/3$  以满足固支条件。选用固体力学和静电模块求解计算, 对理论模型进行验证。对于电学边界条件, 设置接通电路压电纤维片表面上一点的电荷量为  $Q = VC_n$ , 并选用稳态求解器进行求解。如图 7 所示, 理论和有限元仿真结果有很好的一致性, 最大误差不超过 5%, 验证了理论模型的准确性, 在大位移区域刚度出现了较大的偏差, 这主要是由于在理论模型中忽略了高阶模态的贡献。

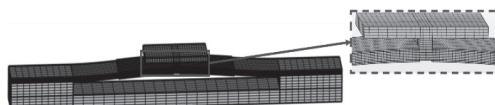
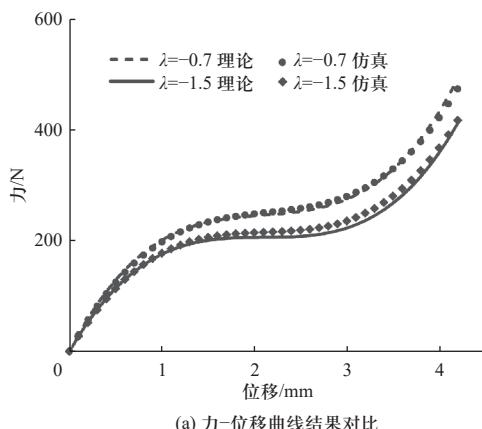
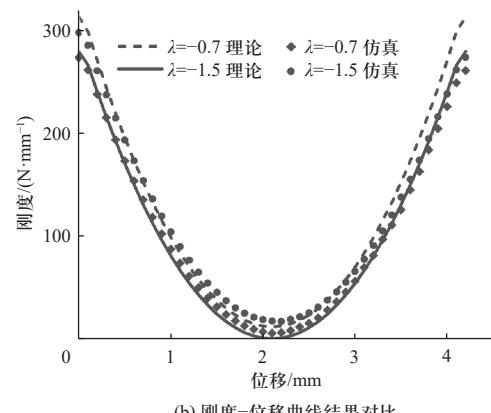


图 6 有限元仿真模型

Fig. 6 Finite element simulation model



(a) 力-位移曲线结果对比



(b) 刚度-位移曲线结果对比

图 7  $\lambda$  分别为 -0.7 和 -1.5 时, 力、刚度与位移之间的关系理论与有限元仿真结果对比

Fig. 7 Theoretical and finite element simulation comparison of the relationship between force, stiffness, and displacement at  $\lambda = -0.7$  and  $\lambda = -1.5$

### 3 隔振器动力学特性分析

#### 3.1 动力学建模与分析

图 8 给出了力电耦合曲梁准零刚度隔振器的动力学模型。隔振器可以看作是一个单自由度隔振系统, 激励幅值小于 0.04 h 时, 工作区域附近的刚度基本不变, 非线性可以暂时忽略<sup>[19]</sup>。在小振幅谐波激励下, 其动力学模型如图 8 所示, 组成有线性弹簧  $k$ 、载荷  $M$ 、阻尼  $c$ 。当载荷固定在平台上时, 平台会向下移动到静力平衡点。当基座受到振动激励时, 质量会围绕平衡点上下振动。质量块和底座的绝对位移分别用  $z_t$  和  $z_0$  表示, 质量块和底座的相对位移可以表示为  $z = z_t - z_0$ 。利用传递率来评估该结构的隔振性能, 其表达式为

$$T = 20 \log \frac{z_t}{z_0} \quad (16)$$

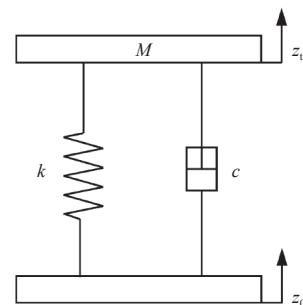


图 8 单自由度动力学模型示意图

Fig. 8 Schematic diagram of a single degree of freedom dynamic model

图 9 为在不同负载和负电容比下的传递率曲线。如 2.2 节中所述, 通过调节负电容比可以实现对隔振

器力位移曲线的调节,从而实现不同负载下的准零刚度特性,这一特性使得隔振器能够适应负载的变化。当设定负载为 24.102 kg 时,将负电容值设置为  $\lambda = -0.7$ ,隔振器的起始隔振频率为 5.1 Hz;当负载变化为 20.795 kg 时,如果不进行负电容调节,隔振器的起始隔振频率变为 15.9 Hz,低频隔振效果明显变差;如果当负载变为 20.795 kg 的同时,将负电容值设置为  $\lambda = -1.5$ ,隔振器的起始隔振频率变为 2 Hz,这会大大改善由负载变化带来的影响。总体而言,计算结果表明,当质量在 20.795 ~ 24.102 kg 之间变化时,通过调节负电容值均可使力电耦合曲梁准零刚度隔振器具有较好的低频隔振效果。

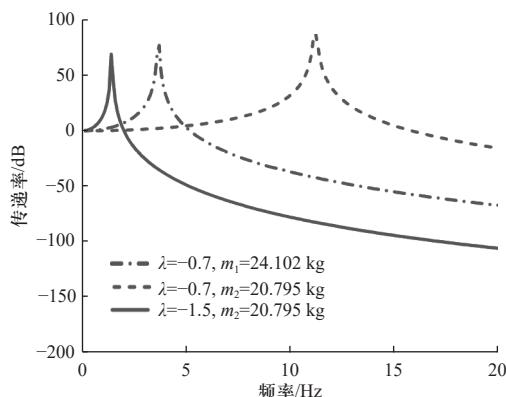


图 9 力电耦合准零曲梁刚度隔振器在外接不同负电容比电路时的传递率曲线

Fig. 9 Transmission of piezoelectric quasi-zero stiffness vibration isolator when connected to external circuits with different negative capacitance ratios

### 3.2 有限元验证

利用图 6 所示的力电耦合曲梁准零刚度隔振器有限元分析模型,选用的材料属性如表 1 所示,并对结构进行了动力学仿真,进而验证理论分析结果。使用商业有限元软件 COMSOL 进行求解计算,在仿真中选择预应力、频域模块进行求解。仿真步骤分为以下两步:①先给定底部为固定约束,通过上面的重物将力电耦合曲梁压缩到工作区间;②将底部的固定约束改为幅值  $P = 0.1$  mm 的位移激励,并进行了求解,以计算位移传递率。设置与理论计算相同的频率范围 0 ~ 20 Hz。取顶部质量块位移幅值  $Z_T$ ,计算模型振动传递率表达式为

$$T = 20 \log \frac{Z_T}{P} \quad (17)$$

通过理论模型和有限元仿真分别对隔振器工作区域的隔振效果进行了求解,采用了无阻尼情况进

行计算,结果如图 10 所示。将有限元仿真与理论计算进行比较,可以发现:当  $\lambda = -0.7$  和  $\lambda = -1.5$  时,有限元仿真结果与理论预测值基本一致,起始隔振频率最大误差为 0.7 Hz,能够分别实现频率在 2.5 Hz 和 5.8 Hz 以上振动的有效隔离。

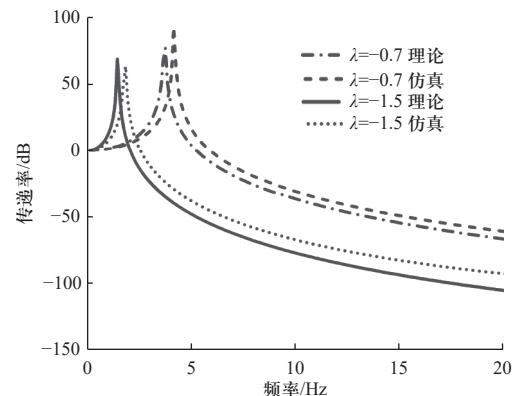


图 10 外接不同负电容电路时隔振器传递率理论模型与有限元仿真对比  
Fig. 10 Theory and finite element simulation comparison of transmission of vibration isolator when connected different external negative capacitor circuits

## 4 结 论

① 建立了压电曲梁的力-位移解析模型。通过模态叠加法和最小总势能原理推导了压电曲梁的非线性力位移关系理论模型,并通过与有限元结果对比验证了理论模型的准确性。

② 负电容能够调节压电曲梁的刚度。基于上述理论模型,分析了负电容对曲梁刚度的影响,结果表明,通过改变外接负电容值调节压电材料的模量,压电曲梁能够在不同负载下实现准零刚度特性。

③ 负电容调节能使隔振器适应不同负载。负载在 20.795 ~ 24.102 kg 范围内变化时,仅通过调节负电容值,可使力电耦合曲梁准零刚度隔振器适应负载的变化,在不同负载下都能具有较好的低频隔振性能。

### 参考文献:

- [1] 汪首坤,史明新,岳斌凯,等.基于自适应阻抗控制的轮足式机器人隔振控制研究 [J].北京理工大学学报,2020,40(8): 888–893.  
WANG Shoukun, SHI Mingxin, YUE Binkai, et al. A vibration isolation control based on adaptive impedance control for wheel-legged robot[J]. Transactions of Beijing Institute of Technology, 2020, 40(8): 888 – 893. (in Chinese)
- [2] 朱冬梅,刘伟,刘海平,等.变杆长 X 形结构隔振系统动力

学特性研究 [J]. 北京理工大学学报, 2022, 42(11): 1136 – 1143.

ZHU Dongmei, LIU Wei, LIU Haiping, et al. Dynamic performance of vibration isolating system with variable rod length X-shaped structure[J]. Transactions of Beijing Institute of Technology, 2022, 42(11): 1136 – 1143. (in Chinese)

[ 3 ] 刘海平, 罗婕. 双层高阻尼隔振器动力学特性研究 [J]. 北京理工大学学报, 2020, 40(1): 17 – 22.

LIU Haiping, LUO Jie. Study on the dynamic characteristics of a double-layered hyper-damping isolator[J]. Transactions of Beijing Institute of Technology, 2020, 40(1): 17 – 22. (in Chinese)

[ 4 ] CARRELLA A, BRENNAN M J, WATERS T P. Static analysis of a passive vibration isolator with quasi-zero-stiffness characteristic[J]. Journal of Sound and Vibration, 2007, 301(3/5): 678–689.

[ 5 ] KOVACIC I, BRENNAN M J, WATERS T P. A study of a nonlinear vibration isolator with a quasi-zero stiffness characteristic[J]. Journal of Sound and Vibration, 2008, 315(3): 700–711.

[ 6 ] HAO Z, CAO Q, WIERCIGROCH M. Two-sided damping constraint control strategy for high-performance vibration isolation and end-stop impact protection[J]. Nonlinear Dynamics, 2016, 86(4): 2129–2144.

[ 7 ] HAO Z, CAO Q, WIERCIGROCH M. Nonlinear dynamics of the quasi-zero-stiffness SD oscillator based upon the local and global bifurcation analyses[J]. Nonlinear Dynamics, 2017, 87(2): 987 – 1014.

[ 8 ] HAO Z, CAO Q. The isolation characteristics of an archetypal dynamical model with stable-quasi-zero-stiffness[J]. Journal of Sound and Vibration, 2015, 340: 61 – 79.

[ 9 ] ZHANG X, CAO Q, QIU H, et al. Dynamic analysis of a loading-adapting quasi-zero-stiffness isolation system based on the rolling lobe air-springs[J]. Journal of Vibration Engineering & Technologies, 2022, 10(8): 3207 – 3225.

[ 10 ] SUN X, JING X, XU J, et al. A quasi-zero-stiffness-based sensor system in vibration measurement[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2014, 61(10): 5606 – 5614.

[ 11 ] DING H, JI J, CHEN L. Nonlinear vibration isolation for fluid-conveying pipes using quasi-zero stiffness characteristics[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2019, 121: 675 – 688.

[ 12 ] LAN C C, YANG S A, WU Y S. Design and experiment of a compact quasi-zero-stiffness isolator capable of a wide range of loads[J]. Journal of Sound and Vibration, 2014, 333(20): 4843 – 4858.

[ 13 ] ZHOU J, WANG X, XU D, et al. Nonlinear dynamic characteristics of a quasi-zero stiffness vibration isolator with cam–roller–spring mechanisms[J]. Journal of Sound and Vibration, 2015, 346: 53 – 69.

[ 14 ] YE K, JI JC, BROWN T. Design of a quasi-zero stiffness isolation system for supporting different loads[J]. Journal of Sound and Vibration, 2020, 471: 115198.

[ 15 ] ZUO S, WANG DY, ZHANG YS, et al. Design and testing of a parabolic cam-roller quasi-zero-stiffness vibration isolator[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2022, 220: 107146.

[ 16 ] QIU J, LANG J H, SLOCUM A H. A curved-beam bistable mechanism[J]. Journal of Microelectromechanical Systems, 2004, 13(2): 137 – 146.

[ 17 ] ZHAO J, ZHOU G, ZHANG D, et al. Integrated design of a lightweight metastructure for broadband vibration isolation[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2023, 244: 108069.

[ 18 ] FAN H, YANG L, TIAN Y, et al. Design of metastructures with quasi-zero dynamic stiffness for vibration isolation[J]. Composite Structure, 2020, 243: 112244.1 – 13.

[ 19 ] DALELA S, BALAJI P S, Jena D P. Design of a metastructure for vibration isolation with quasi-zero-stiffness characteristics using bistable curved beam[J]. Nonlinear Dynamics, 2022, 108(3): 1931 – 1971.

[ 20 ] YI K, COLLET M. Broadening low-frequency bandgaps in locally resonant piezoelectric metamaterials by negative capacitance[J]. Journal of Sound and Vibration, 2021, 493(1): 115837.

[ 21 ] LI L, YIN S, LIU X, et al. Enhanced electromechanical coupling of piezoelectric system for multimodal vibration[J]. Mechatronics, 2015, 31: 205 – 214.

[ 22 ] CHE K, YUAN C, WU J, et al. Three-dimensional-printed multistable mechanical metamaterials with a deterministic deformation sequence[J]. Journal of Applied Mechanics, 2017, 84 (1): 011004.

## 附录 A. 考虑 1<sup>st</sup> 和 5<sup>th</sup> 模态计算力位移曲线

由于曲梁两端约束对称,载荷位于曲梁对称中心,所以只需要考虑对称阶模态,即  $i=1, 3, 5, \dots$  其中,第3阶模态振型在  $d=l/2$  处是零点,所以,考虑第1阶和第5阶模态,曲梁变形后的形状可以表示为

$$w(x) = A_1 \left[ 1 - \cos\left(2\pi \frac{x}{l}\right) \right] + A_5 \left[ 1 - \cos\left(6\pi \frac{x}{l}\right) \right] \quad (\text{A.1})$$

压电曲梁的弯曲能可以表示为

$$u_b = 2 \left\{ \frac{D_b}{2} \int_0^{0.23l} (\bar{w}'' - w_1'' - w_5'')^2 dx + \frac{D_{\text{eff}}}{2} \int_{0.23l}^{0.49l} (\bar{w}'' - w_1'' - w_5'')^2 dx \right\} = \\ (w_1'' - w_5'')^2 dx + \frac{D_b}{2} \int_{0.49l}^{0.5l} (\bar{w}'' - w_1'' - w_5'')^2 dx \} = \\ \frac{D_b}{l^3} \left[ \left( -\frac{h}{2} + A_1 \right)^2 C_{11} + A_5^2 C_{12} - \left( -\frac{h}{2} + A_1 \right) A_5 C_{13} \right] + \\ \frac{D_{\text{eff}}}{l^3} \left[ \left( -\frac{h}{2} + A_1 \right)^2 C_{21} + A_5^2 C_{22} - \left( -\frac{h}{2} + A_1 \right) A_5 C_{23} \right] + \\ \frac{D_b}{l^3} \left[ \left( -\frac{h}{2} + A_1 \right)^2 C_{31} + A_5^2 C_{32} - \left( -\frac{h}{2} + A_1 \right) A_5 C_{33} \right]$$

式中：

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{11} = \int\limits_0^{0.23} (\bar{W}'' - W_1'')^2 dX = 1.998 \ 4\pi^4, \\ C_{12} = \int\limits_0^{0.23} (W_5'')^2 dX = 160.806 \ 5\pi^4, \\ C_{13} = \int\limits_0^{0.23} 2W_5'' (\bar{W}'' - W_1'') dX = 0.089 \ 5\pi^4, \\ C_{21} = \int\limits_{0.23}^{0.49} (\bar{W}'' - W_1'')^2 dX = 1.841 \ 9\pi^4, \\ C_{22} = \int\limits_{0.23}^{0.49} (W_5'')^2 dX = 150.385 \ 9\pi^4, \\ C_{23} = \int\limits_{0.23}^{0.49} 2W_5'' (\bar{W}'' - W_1'') dX = -2.950 \ 6\pi^4, \\ C_{31} = \int\limits_{0.49}^{0.5} (\bar{W}'' - W_1'')^2 dX = 0.159 \ 8\pi^4, \\ C_{32} = \int\limits_{0.49}^{0.5} (W_5'')^2 dX = 12.807 \ 6\pi^4, \\ C_{33} = \int\limits_{0.49}^{0.5} 2W_5'' (\bar{W}'' - W_1'') dX = 2.861 \ 1\pi^4, \\ \bar{W} = \frac{\bar{w}}{l}, W_1 = \frac{w_1}{l}, W_5 = \frac{w_5}{l}, X = \frac{x}{l} \end{array} \right.$$

压电曲梁的压缩能可以表示为

$$u_c = 4 \frac{E_p^{su} h_p b}{2(0.26l)} \Delta s_p^2 + \frac{E_b t b}{2l} \Delta s_b^2 \quad (A.3)$$

$\Delta s_p$ 和 $\Delta s_b$ 分别为压电纤维片和曲梁的变形量,可以表示为

$$\Delta s_p = s_p - s_1 = \frac{1}{2} \int_{0.23l}^{0.48l} \left[ (w_1' + w_5')^2 - (\bar{w}')^2 \right] dx = \frac{1}{2l} \left[ \left( -\frac{h^2}{4} + A_1^2 \right) D_{11} + A_5^2 D_{12} + A_1 A_5 D_{13} \right] \quad (A.4)$$

$$\Delta s_b = s_b - s_2 = \frac{1}{2} \int_0^l \left[ (w_1' + w_5')^2 - (\bar{w}')^2 \right] dx = \frac{1}{2l} \left[ \left( -\frac{h^2}{4} + A_1^2 \right) D_{21} + A_5^2 D_{22} + A_1 A_5 D_{23} \right] \quad (A.5)$$

式中：

$$\left\{ \begin{array}{l} D_{11} = \int\limits_{0.23}^{0.49} (W_1')^2 dX = 0.579 \cdot 5\pi^2, \\ D_{12} = \int\limits_{0.23}^{0.49} (W_5')^2 dX = 5.182 \cdot 6\pi^2, \\ D_{13} = \int\limits_{0.23}^{0.49} 2W_1'W_5' dX = -0.468 \cdot 4\pi^2, \\ D_{21} = \int\limits_0^1 (W_1')^2 dX = 2\pi^2, \\ D_{22} = \int\limits_0^1 (W_5')^2 dX = 18\pi^2, \\ D_{23} = \int\limits_0^1 2W_1'W_5' dX = 0, \\ W_1 = \frac{w_1}{l}, W_5 = \frac{w_5}{l}, X = \frac{x}{l} \end{array} \right.$$

将式(A.4)和(A.5)带入到式(A.3),压缩能可以表示为

$$u_c = \frac{4E_p^{\text{su}}h_p b}{2(0.26l^3)} \left[ \left( A_1^2 - \frac{h^2}{4} \right) D_{11} + A_5^2 D_{12} + A_1 A_5 D_{13} \right]^2 + \frac{E_b t b}{8l^3} \left[ \left( A_1^2 - \frac{h^2}{4} \right) D_{21} + A_5^2 D_{22} + A_1 A_5 D_{23} \right]^2 \quad (\text{A.6})$$

中点的位移为

$$d\left(\frac{l}{2}\right) = \bar{w}\left(\frac{l}{2}\right) - w\left(\frac{l}{2}\right) \quad (\text{A.7})$$

力做功产生的势能为

$$u_f = -f d \left( \frac{l}{2} \right) = -f (h - 2A_1 - 2A_5) \quad (A.8)$$

系统的总能量则可表示为

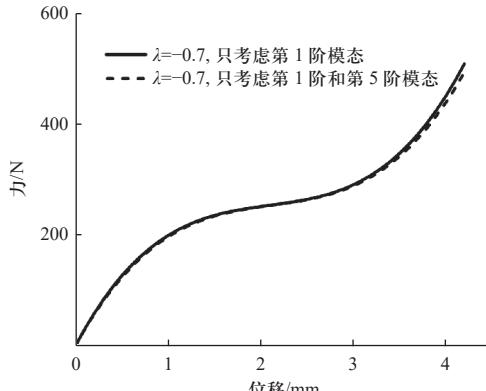
$$y_{\text{tot}} \equiv y_b \pm y_c \pm y_e \quad (\text{A.9})$$

根据最小势能原理：

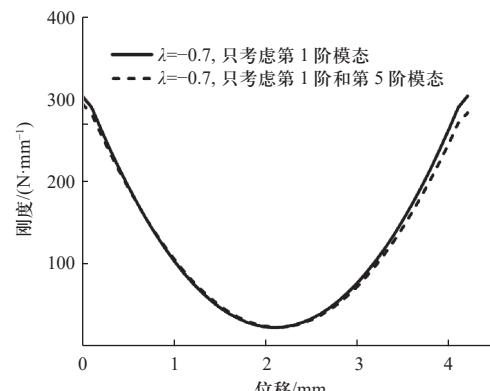
$$\begin{cases} \frac{\partial(u_{\text{tot}})}{\partial A_1} = 0 \\ \frac{\partial(u_{\text{tot}})}{\partial A_5} = 0 \end{cases} \quad (\text{A.10})$$

通过式(A.7)和(A.10), 给定一个  $d$  就能够求出

对应的  $f$ , 如图 A1 为只考虑 1 阶与考虑 1、5 阶模态的对比结果, 从中可以看出, 考虑高阶模态对于力-位移曲线和刚度-位移曲线的前半段并没有太大影响, 只会在位移超过 3 mm 之后产生一些影响, 但是这些影响并不明显.



(a) 力-位移曲线结果对比



(b) 刚度-位移曲线结果对比

附图 A1 力-位移和刚度-位移理论分析结果

Fig. A1 Theoretical results of the force-displacement curve and the stiffness-displacement curve of the isolator

(责任编辑: 匡梅)